Tentamen Metrische Ruimten
5 juli 2011, 14:00 - 17:00 uur

De vragen mogen zowel in het Nederlands als in het Engels beantwoord worden.

Opgave 1

(a) Neem aan dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een bijectieve functie is. Bewijs dat d, gedefinieerd door $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ met $x, y \in \mathbb{R}$, een metriek is op $\mathbb{R}$.

(b) Stel dat d een metriek is op een niet lege verzameling X. Definieer voor elk paar $x, y \in X$, $d^{(1)}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ en $d^{(2)}(x, y) = d(x, y)^2$. Bewijs dat $d^{(1)}$ een metriek is op X, maar dat $d^{(2)}$ geen metriek hoeft te zijn op X.

Opgave 2

(a) Laat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Laat zien dat de verzameling $f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$, met $c \in \mathbb{R}$, een gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is.

(b) Laat zien dat het boloppervlak $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ compact is.

(c) Laat $X \subseteq \mathbb{R}$ een niet compacte deelverzameling zijn. Bewijs dat er een continue functie $f : X \to \mathbb{R}$ bestaat die niet begrensd is. [Hint: bekijk de gevallen waarin X niet begrends is en waarin X niet gesloten is apart.]

Opgave 3

Laat A een deelverzameling zijn van een topologische ruimte X. Bewijs dat

(a) A gesloten is in X dan en slechts dan als $\partial A \subseteq A$.

(b) $\partial A = \emptyset$ dan en slechts dan als A zowel open als gesloten is in X.

Opgave 4

Bewijs dat elke oneindige verzameling met de co-eindige topologie samenhangend is. [Hint: de co-eindige topologie van een niet lege verzameling X bestaat uit de lege verzameling samen met elke deelverzameling U van X waarvoor geldt dat $X \setminus U$ eindig is.]

Exam Metric Spaces
5 July 2011, 14:00 - 17:00

You can answer the exam in Dutch or English.

Exercise 1

(a) Suppose that $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a 1-1 function. Prove that d defined by $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ for $x, y \in \mathbb{R}$ is a metric for $\mathbb{R}$.

(b) Suppose that d is a metric for a non-empty set X, and for any $x, y \in X$ define $d^{(1)}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ and $d^{(2)}(x, y) = d(x, y)^2$. Prove that $d^{(1)}$ is a metric for X but $d^{(2)}$ may not be a metric for X.

Exercise 2

(a) Consider a continuous function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Show that the set $f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$, where $c \in \mathbb{R}$, is a closed subset of $\mathbb{R}^n$.

(b) Show that the sphere $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ is compact.

(c) Prove that if $X \subseteq \mathbb{R}$ is not compact, then there is a continuous function $f : X \to \mathbb{R}$ which is not bounded. [Hint: consider separately the cases X is not bounded and X is not closed in $\mathbb{R}$.]

Exercise 3

Suppose that A is a subset of a topological space X. Prove that

(a) A is closed in X if and only if $\partial A \subseteq A$.

(b) $\partial A = \emptyset$ if and only if A is open and closed in X.

Exercise 4

Prove that any infinite set with the co-finite topology is connected. [Recall that the co-finite topology of a non-empty set X consists of the empty set together with every subset U of X such that $X \setminus U$ is finite.]